# 1. Kümeler Kuramının Birkaç Aksiyomu ve Temel Tanımlar

Bu bölümde kümeler kuramının aksiyomlarından yola çıkarak kartezyen çarpım, fonksiyon, ilişki gibi bazı matematiksel kavramların matematiksel tanımlarını vereceğiz. Bu kavramlar doğal sayılar kümesini matematiksel olarak tanımlamamıza yardımcı olacaklar.

Okurun sezgisel kümeler kuramıyla âşina olduğunu varsayacağız ve çok fazla pedagojik olmayacağız. Bu konuda açığı olan okur gerektiğinde [SKK]'ya başvurabilir.

Kümeler kuramı birden çok değişik biçimde aksiyomlaştırılabilir. Bu aksiyom sistemlerinin en ünlüsü, en kabul göreni ve en kullanılanı bu ve [AKK] ders notlarında açıklayacağımız ZFC adıyla bilinenidir.

ZFC, Zermelo'nun Z'si, Fraenkel'in F'si ve Seçim Aksiyomu'nun "seçim"inin frenkçeleri olan "Choice" ya da "Choix" gibi sözcüklerin C'sidir.

ZFC dışındaki sistemlerin en bilineni Von Neumann, Gödel ve Bernays'in bulduğu ve kısaca GB olarak bilinen aksiyom sistemidir. Ama biz bu ve bundan sonraki ders notlarında sadece ZFC'yi açıklamakla yetineceğiz.

ZFC, tanımlanmamış iki terim kabul eder: "küme" ve "elemanı olmak". Küme bir nesne adıdır. "Elemanı olmak" ise iki küme arasındaki doğru ya da yanlış olabilecek bir ilişkidir. Eğer $x$ kümesi $y$ kümesinin elemanıysa bu $x \in y$ olarak yazılır. Aksi halde $x \notin y$ yazılır. Bundan geçen bölümde sözetmiştik ama bir defa daha tekrarlamakta bir sakınca görmüyoruz.

Dikkat: Kümenin ne demek olduğunu ve "elemanı olmanın" anlamını matematiksel olarak açıklamıyoruz, matematiksel açıklamaları yoktur çünkü, pedagojik açıklamaları da [SKK] kitabında uzun uzadıya yaptık. "Küme"yi ve "elemanı olmak"ı tanımsız terimler olarak kabul edeceğiz. Her teori tanımsız terimler kabul etmek zorundadır.

Elemanlar da dahil olmak üzere tanımlayacağımız her şeyin bir küme olduğu dikkatli okurun gözünden kaçmayacaktır, dikkatsiz okurun da gözünden kaçmasın!

Amacımız, büyük ölçüde, aksiyomları kullanarak kümelerden oluşan toplulukların hangilerinin küme olduklarını belirlemek olacak. Amacımız Bertrand Russell Paradoksu [SSK] gibi paradokslardan kaçınmak, paradoks yaratacak toplulukların küme olmalarını engellemek.

Aksiyomları teker teker sıralamaya başlamadan önce bir konuya daha parmak basmak gerekiyor. Matematiğin

$$x = x,$$
$$x = y \to y = x$$
$$(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$$
$$\alpha \vee \neg\alpha$$
$$(\varphi(x) \wedge x = y) \to \varphi(y)$$

gibi (aslında herkesin bildiği ama pek az kimsenin biçimsel olarak bir yerde yazılı gördüğü) ***mantıksal aksiyomları*** da vardır. Bu yazıda bu aksiyomlardan değil, ***kümeler kuramının aksiyomlarından*** sözedeceğiz. ($\to$, $\wedge$ gibi simgelerin anlamları için **Önermeler Mantığı** [ÖM] adlı kitabımıza bakmalısınız.)

## 1.1. Basit Aksiyomlar

ZFC'nin birinci aksiyomu, hiç eleman içermeyen bir kümenin varlığını söyleyecek.

**A1. Boşküme Aksiyomu.** *Hiç elemanı olmayan bir küme vardır.*

Eğer simgesel bir dille yazacak olursak, bu aksiyom,

$$\exists x \forall y \ (y \notin x)$$

olarak yazılır ve "öyle bir $x$ vardır ki, $y$ ne olursa olsun, $y$, $x$'in bir elemanı değildir" biçiminde okunur.

"$\exists x$" simge dizisi "öyle bir $x$ kümesi var ki" olarak, "$\forall y$" simge dizisi "her $y$ kümesi için" olarak okunurlar. Formüllerde kullanılan tüm $x$'ler ve $x$'ler ve benzeri değişkenler "küme" anlamına gelecekler.

"$x \notin y$" yerine, daha biçimsel olmak için, "$\neg(x \in y)$" yazabilirdik, nitekim "$\neg$" simgesi, hemen ardından gelen önermenin yanlış olduğunu belirtir.

Şimdilik hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını biliyoruz. Bu ilk aksiyomdan önce, herhangi bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyorduk! Zaten aksiyomlarımızın çok büyük bir çoğunluğu elemanlardan oluşan hangi toplulukların küme olduklarını söyleyecek. Amacımız, bir yandan yeni kümeler yaratırken, diğer yandan da bir paradoksa yol açan "bütün kümeler topluluğu"nun ve daha başka paradokslara yol açan "çok büyük" toplulukların küme olmalarını engellemek.

İkinci aksiyomumuz, aynı elemanları olan iki kümenin birbirine eşit olduklarını söyleyecek:

**A2. Küme Eşitliği Aksiyomu.** *Aynı elemanları olan iki küme birbirlerine eşittir.*

Bu aksiyom simgesel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x \ \forall y \ (\forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

Bu aksiyomun ters istikametlisi olan

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \to \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

önermesi de doğrudur ama bu önerme için bir aksiyoma ihtiyaç yok, çünkü bu önermenin doğruluğu matematiğin mantıksal aksiyomlarından çıkar: Eğer $x = y$ ise, o zaman $x$ için doğru olan her şey, örneğimizde $z \in x$ önermesi, $y$ için de doğrudur ve $y$ için doğru olan her şey, örneğimizde $z \in y$ önermesi, $x$ için de doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde hiç elemanı olmayan tek bir küme olduğu kanıtlanabilir. Hiç elemanı olmayan iki küme olsun. Bunlara $\emptyset_1$ ve $\emptyset_2$ adını verelim. Eğer $\emptyset_1$, $\emptyset_2$'ye eşit olmasaydı, A2'ye göre, bu iki kümeden birinde olan ama diğerinde olmayan bir eleman olurdu. Ama bu kümelerin ne birinde ne diğerinde eleman yok ki birinde olup da diğerinde olmayan bir eleman olsun! Demek ki $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

Madem ki hiç elemanı olmayan tek bir küme var, o zaman bu kümeye bir ad verelim: ***boşküme***. Boşkümeyi $\emptyset$ simgesiyle göstereceğiz.

Boşkümenin hiç elemanı olmadığından, yani

$$\forall y\ (y \notin \emptyset)$$

olduğundan,

$$\emptyset \notin \emptyset$$

olur.

Bundan böyle formüllerimizde ve önermelerimizde $\emptyset$ simgesini bir kısaltma olarak kullanacağız. Eğer isteseydik bu simgeyi hiç kullanmadan da her şeyi ifade edebilirdik ama o zaman önermelerimiz anlaşılamayacak derecede uzun olabilirler.

Benzer şekilde, altküme simgesi olan $\subseteq$ simgesini de formüllerimizde kullanacağız. $\subseteq$ simgesi şu anlama gelir:

$$x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z\ (z \in x \to z \in y)$$

Bu durumda, $x$'in $y$'nin altkümesi olduğu söylenir.

Boşküme her kümenin bir altkümesidir, çünkü eğer boşküme bir $x$ kümesinin altkümesi olmasaydı, boşküme de olup da (!)

$x$'te olmayan bir eleman olurdu, ki bunun mümkün olmadığını biliyoruz, çünkü boşkümenin hiç elemanı yoktur. Demek ki

$$\forall x\ \emptyset \subseteq x$$

formülü doğrudur. Bu formülü sadece kümeler kuramının $\in$ simgesiyle yazmak isteseydik, "hiç elemanı olmayan her (!) küme her kümenin altkümesidir" anlamına şöyle bir şey yazardık:

$$\forall a\ ((\forall x\ x \notin a) \to \forall x\ \forall y\ (y \in a \to y \in x)).$$

Görüldüğü gibi pek pratik değil. Bu arada bir not: Kullanuılan değişken sayısında ekonomik davranmayıp yukardaki formülü

$$\forall a\ ((\forall x\ x \notin a) \to \forall y\ \forall z\ (z \in a \to z \in y)).$$

biçiminde yazmak daha pedagojik olabilirdi.

Boşkümenin her altkümesinin boşküme olduğunu kanıtlamak zor değil. Bu önerme matematiğin biçimsel dilinde şöyle yazılır:

$$\forall x\ (x \subseteq \emptyset \to x = \emptyset).$$

Bu formülü $\emptyset$ ve $\subseteq$ simgelerini kullanmadan, sadece $\in$ simgesini kullanarak yazmayı okura nahoş bir alıştırma olarak bırakıyoruz.

Birinci aksiyomla, hiç elemanı olmayan bir kümenin varlığını öğrenmiş olduk. İkinci aksiyom bize yeni bir küme vermiyor. Demek ki, kümeler evreninde şimdilik sadece tek bir kümenin varlığından emin olabiliriz: Boşküme! Başka kümeler olabilir de olmayabilir de. Evrene göre değişir... (Masal gibi dinleyin bu satırları...)

Bir sonraki aksiyom bir kümenin bazı altkümeleri olduğunu söyleyecek. Önce aksiyomu yazalım daha sonra gereken açıklamaları yaparız.

**A3. Tanımlı Altküme Aksiyomu.** *$x$ bir küme ve* $\varphi(z)$, *kümeler kuramının dilinde yazılmış bir değişkenli bir formül* (*özellik*) *olsun. O zaman $x$'in* $\varphi$ *özelliğini sağlayan $z$ elemanları bir küme oluştururlar*.

Bir iki örnekle bu aksiyomu açıklamaya çalışalım. Diyelim doğal sayılar kümesi diye bir kümenin varlığını biliyoruz. Ve diyelim çift sayı olma özelliğini kümeler kuramının dilinde ifade edebildik, yani öyle bir $\varphi(z)$ formülü bulduk ki, her $z$ doğal sayısı için, $\varphi(z)$ formülünün doğru olması için yeter ve gerek koşul $z$'nin bir çift sayı olmasıdır. O zaman, yukardaki aksiyoma göre, çift doğal sayılardan oluşan bir küme vardır.

Mesela,

$$\{z \in x : z \notin z\}$$

kümesi, bu aksiyomun yardımıyla, $\varphi(z)$ formülü "$z \notin z$" formülü olarak alınarak bulunmuştur.

"Kümeler kuramının dilinde ifade etme"nin ne demek olduğuna pek takılmayın şimdilik. Aşağı yukarı şu anlama gelir:

$$\exists,\ \forall,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ (,\ ),\ =,\ \in$$

ve $x$, $y$, $z$ gibi değişkenleri kullanarak sonlu uzunlukta bir simgeler dizisiyle ifade edilebilmek demektir. Bu aksiyomu kullandığımız her durumda, formülün ne olduğunu anlayacağınızı umuyoruz. Şundan emin olun: Eğer formülün anlamını Türkçe ifade edebiliyorsanız, o zaman formülü mutlaka yukardaki simgesel dilde de ifade edebilirsiniz... Bunu kanıtlanmamış ama inandığınız bir tez olarak kabul ederseniz, hayat hem daha kolay olur hem de ayrıntılara takılmadan konunun derinine inebilirsiniz. Ama Bölüm 4B'de bu konudan biraz daha fazla sözedeceğiz.

Bu aksiyomla varlığı söylenen küme, elbette, $x$ kümesinin bir altkümesidir, ne de olsa elemanları $x$'in ($\varphi$ özelliğini sağlayan) elemanlarından oluşuyor.

Ayrıca varlığı söylenen bu küme, Küme Eşitliği Aksiyomu'na göre biriciktir. (Neden?) Biricik olan bu kümeyi,

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

olarak yazarız.

Dikkat edilirse, $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan **tüm** kümelerin bir küme oluşturduğunu söylemedik. Yani,

$$\{z : \varphi(z)\}$$

topluluğunun küme olduğunu söylemedik. Sadece $x$'in (altını çizeriz: $x$'in) $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan elemanların bir küme oluşturduğunu söyledik. Yani yeni kümemizin elemanlarını $x$ ile kısıtladık. Bu kısıtlama sayesinde Russell Paradoksu'nun engellenmiş olduğunu özellikle vurgulamak isteriz.

Tanımlı Küme Aksiyomu, biçimsel dilde şöyle yazılır:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))).$$

Yukarıdaki formül, $y$ kümesinin "$x$'in, $\varphi(z)$ formülü tarafından tanımlanmış altkümesi" olduğu söylenir. (Formülün matematiksel anlamı Bölüm 4B'de açıklanacak ama okur bu aşamada - ve diğer aşamalarda da - bu konunun üstünde pek durmasın.)

Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan önce sadece boşkümenin varlığından emindik. Tanımlı Altküme Aksiyomu ise sadece var olan kümelerin altkümelerini verir. Boşkümenin tek bir altkümesi olduğundan, o altküme de boşküme olduğundan, Tanımlı Altküme Aksiyomu bize şimdilik boşkümeden başka kümelerin de var olduğunu söylemiyor, ama ilerde tanımlanmış kümelerden başka kümelerin varlığını bilmemize yardımcı olacak.

Şimdilik bu aksiyomu kullanarak, boş olmayan bir kümenin elemanlarının kesişimin bir küme olduğunu gösterebiliriz:

**Önsav 1.1.** *$x$, boş olmayan bir küme olsun. Elemanları, $x$'in elemanlarının ortak elemanları olan bir küme vardır. Yani $x$'in elemanlarının kesişimi bir kümedir.*

**Kanıt:** Tanımlı Altküme Aksiyomu'nu $x$'in bir $x_0$ elemanına uygulayacağız. $x$ boşküme olmadığından, $x$'in bir elemanı vardır. Bu elemanlardan birini seçelim. Seçtiğimiz bu elemana $x_0$ diyelim. $\varphi(z)$ özelliğimiz de

$$\forall t\ (t \in x \rightarrow z \in t)$$

olsun. $\varphi(z)$, $z$'nin, $x$'in tüm $t$ elemanlarının elemanı olduğunu söylüyor, dolayısıyla $\varphi(z)$ özelliğini sağlayan her $z$ elemanı mecburen $x_0$ kümesinin de bir elemanıdır. Demek ki Tanımlı Altküme Aksiyomu'ndan dolayı küme olduğunu bildiğimiz

$$\{z \in x_0 : \varphi(z)\}$$

topluluğu, aslında $x$'in tüm elemanlarının ortak elemanıdır. □

Boş olmayan bir kümemiz olmadığından, bu önsavı şimdilik bir kümeye uygulayamayız ama ilerde çok işimize yarayacak.

Yukardaki önsavda varlığı kanıtlanan kümeye ***x'in elemanlarının kesişimi*** adı verilir ve bu küme $\cap x$ olarak gösterilir.

Tanım gereği,

$$z \in \cap x \Leftrightarrow \text{her } t \in x \text{ için } z \in t.$$

ya da daha matematiksel bir dille,

$$z \in \cap x \leftrightarrow \forall t\ (t \in x \rightarrow z \in t).$$

Ama $x$'in boşküme olmaması gerektiği hiçbir zaman unutulmamalı, zira eğer yukardaki formülde $x = \emptyset$ alırsak ve $\cap\emptyset$'nin bir küme olduğunu varsayarsak, o zaman

$$z \in \cap\emptyset \Leftrightarrow \text{her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi doğru olur ve sağdaki

$$\text{her } t \in \emptyset \text{ için } z \in t$$

önermesi her $z$ için doğru olduğundan (boşkümenin her elemanı her özelliği sağlar, örneğin $z$'yi eleman olarak içerir, aksi halde boşkümede o özelliği sağlamayan bir eleman olurdu), $\cap\emptyset$ tüm $z$ kümelerini içerirdi, yani tüm kümeleri eleman olarak içeren bir küme olurdu ki böyle bir kümenin olmaması gerektiğini Russell Paradoksu'ndan dolayı biliyoruz. Nitekim kanıtımızda da $x$'in boşküme olmadığı koşulunu $x$'ten bir $x_0$ elemanı seçerek kullandık...

**Alıştırma 1.** $x$ ve $y$ birer kümeyse, $x \setminus y$'nin de bir küme olduğunu, yani

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \Leftrightarrow (t \in x \wedge t \notin y))$$

önermesini kanıtlayın.

2. $x$ bir kümeyse, $\cap\cap x$ kümesini kümeler kuramının bir formülüyle $x$ cinsinden (yani $x$'i kullarak) ifade edin. Bir başka deyişle

$$y = \cap\cap x \Leftrightarrow \varphi(x, y)$$

ifadesinin doğru olduğu bir $\varphi(x, y)$ formülü bulun.

Bir sonraki aksiyomu okurken, bir kümenin elemanlarının da küme olduklarını unutmayın.

**A4. Bileşim Aksiyomu.** *Eğer $x$ bir kümeyse, sadece ve sadece $x$'in elemanlarının en azından birinde olan elemanlardan oluşan bir küme vardır.*

Bu aksiyomun biçimsel yazılımı şöyledir:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists t\ (t \in x \wedge z \in t)).$$

Bileşim Aksiyomu'nun var olduğunu söylediği bu küme A2'den dolayı biriciktir. Adına ***x'in elemanlarının bileşimi*** denir ve $\cup x$ olarak gösterilir. Demek ki,

$$z \in \cup x \Leftrightarrow \exists t\ (t \in x \wedge z \in t).$$

Şimdilik elimizde sadece boşküme olduğundan, bu aksiyomu ancak boşkümeye uygulayabiliriz. $x$ yerine $\varnothing$ alalım, bakalım ne elde edeceğiz? (Boşkümeden başka bir şey elde edememiz gerekiyor, yoktan bir şey var edilemez!)

$$z \in \cup\varnothing \Leftrightarrow \exists t\ (t \in \varnothing \wedge z \in t).$$

Demek ki $z$'nin $\cup\varnothing$ kümesinde olması için, yeter ve gerek koşul, boşkümede $z$'yi içeren bir $t$ elemanının olması! Ama bu mümkün olmadığından $\cup\varnothing$ kümesinin hiç elemanı olamaz, yani

$$\cup\varnothing = \varnothing$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdiye kadar 4 aksiyom yazdık, ama boşkümeden öteye gidemedik, boşkümeden başka bir kümenin olup olmadığını bile bilmiyoruz. İlk aksiyomu yazmasaydık, boşkümemiz bile olmayacaktı! Bir sonraki aksiyom, boşkümeden başka kümeler de var edecek.

Bir sonraki aksiyom, eğer $x$ ve $y$ birer kümeyse o zaman sadece ve sadece bu iki elemanı içeren bir $\{x, y\}$ kümesinin olduğunu, yani $\{x, y\}$ topluluğunun bir küme olduğunu söyleyecek.

**A5. İki Elemanlı Küme Aksiyomu.** *Eğer x ve y birer kümeyse, o zaman sadece ve sadece x'i ve y'yi eleman olarak içeren bir küme vardır.*

Bu aksiyomun biçimsel hali şöyle:

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y)).$$

Varolduğu söylenen bu küme A2'den dolayı biriciktir ve $\{x, y\}$ olarak gösterilir.

Dikkat: Aksiyomda $x$, $y$'den değişik olmak zorundadır demiyor. $x$, bal gibi de $y$'ye eşit olabilir. Bu durumda $\{x, y\}$ yerine daha sade olarak $\{x\}$ yazılır.

Kolaylık olsun, formüllerimiz anlaşılmayacak kadar çok uzamasın diye, $\{x, y\}$ yazılımını bir kısaltma olarak formüllerimizde kullanacağız.

Bu aksiyomu şimdilik yegâne kümemiz olan boşkümeye uygulayalım, yani yukardaki aksiyomda $x = y = \emptyset$ alalım. O zaman tek elemanlı $\{\emptyset\}$ kümesini buluruz.

Devam edelim, A5 aksiyomunda $x = \emptyset$ ve $y = \{\emptyset\}$ alırsak,

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

kümesini buluruz. Bu kümenin iki elemanı vardır, çünkü $\emptyset$ ve $\{\emptyset\}$ değişik kümelerdir, çünkü aynı elemanları yoktur, örneğin $\{\emptyset\}$ kümesinin $\emptyset$ elemanı diğer küme olan boşkümenin bir elemanı değildir. Devamla,

$$\{\{\emptyset\}\},$$
$$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}$$
$$\{\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

gibi kümeler de buluruz.

Bütün bu kümeler en fazla iki elemanlı. Ama A5 ile A4'ü birlikte kullanarak daha fazla elemanlı kümeler de bulabiliriz. Önce bir önsav:

**Önsav 1.2.** *Eğer $x$ ve $y$ iki kümeyse, $x \cup y$ de bir kümedir, yani ya $x$ ya da $y$'nin (her ikisinin birden de olabilir) elemanlarından oluşan bir küme vardır.*

**Kanıt:** A5'e göre $\{x, y\}$ bir kümedir. A4 ise bir kümenin elemanlarının bileşiminin bir küme olduğunu söylüyor, demek ki $\{x, y\}$ kümesinin elemanlarının bileşimi de bir kümedir. □

Yukarda varlığı söylenen kümeyi daha önce (A4'ten hemen sonra) $\cup\{x, y\}$ olarak yazdık ama bu küme daha ziyade $x \cup y$ olarak yazılır.

İki kümenin bileşimini alabiliyorsak, biraz daha sabırla, elbette sonlu sayıda kümenin de bileşimini alabiliriz. Bu arada

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$$

ya da

$$x \cup y = y \cup x$$

gibi okurun bilmesi gereken eşitlikleri bir kez daha kanıtlamıyoruz. Burada amacımız ZFC aksiyomların bazılarını verip temel kavramları matematiksel olarak tanımlamak.

Önsav 1.2 sayesinde örneğin üç elemanlı bir kümenin varlığını kanıtlayabiliriz:

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu biliyoruz.

$$\{\{\{\emptyset\}\}\}$$

topluluğunun da bir küme olduğunu biliyoruz. Önsav 1.2'yi kullanarak bu iki kümenin bileşimini alarak, üç elemanlı

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

kümesini buluruz. Bu kümenin gerçekten üç elemanlı olduğunun kanıtını okura bırakıyoruz.

Böyle giderek, istediğimiz çoklukta ama hep sonlu sayıda elemanı olan kümeler bulabiliriz.

A4 ve A5 aksiyomları bize sadece sonlu sayıda elemanı olan kümeler vadeder, sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin varlığını göstermek için başka aksiyomlara ihtiyacımız var.

Bu arada, sonsuz sayıda elemanı olan bir kümenin olmadığını söylemiyorum, sadece varsa da varlığını kanıtlayamayacağımızı söylüyorum.

**Alıştırma 2.** $x$ ve $y$ birer kümeyse, $x \Delta y$'nin de bir küme olduğunu, yani

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ (t \in z \Leftrightarrow ((t \in x \wedge t \notin y) \vee (t \notin x \wedge t \in y)))$$

önermesini kanıtlayın. ($x \Delta y = (x \cup y) \setminus (x \cap y)$ anlamına gelir.)

**A6. Altkümeler Kümesi Aksiyomu.** *Eğer $x$ bir kümeyse, elemanları $x$'in altkümelerinden oluşan bir küme vardır.*

A2'den dolayı aksiyomda olduğu söylenen kümeden bir tane vardır ve bu küme $\wp(x)$ olarak yazılır.

Biçimsel matematik dilinde bu aksiyom şunu söylemektedir:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x).$$

Burada kısaltma olarak $\subseteq$ simgesini kullandık. Kısaltma kullanmadan bu aksiyom şöyle yazılır:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \forall t\ (t \in z \rightarrow t \in x)).$$

Buraya kadar verdiklerimiz kümeler kuramının en basit aksiyomlarıydı. Nerdeyse ilkokul seviyesinde.

Bu aksiyomlarla sonsuz bir kümenin varlığı kanıtlanamaz. Çünkü sonlu kümelerden yola çıkarak aksiyomlarımızdan hiçbiri sonsuz bir küme yaratmamızı sağlamaz. Bunu görmek için aksiyomlarımıza teker teker bakalım.

A1, 0 elemanlı bir kümenin varlığını söylüyor. Bu aksiyom sonsuz bir küme yaratamaz.

A2, zaten bir küme yaratmıyor.

A3, var olan bir $x$ kümesinin bir altkümesini yaratıyor. Eğer $x$ sonlu bir kümeyse, A3'ün yarattığı altküme de sonludur elbette.

A4, bir $x$ kümesinin elemanlarının bileşimini alıyor. Eğer $x$'te sonlu sayıda eleman varsa ve $x$'in her elemanı sonlu bir kümeyse, elbette $x$'in elemanlarının bileşimi de sonludur. Nitekim eğer $x$'in en fazla $n$ tane elemanı varsa ve $x$'in her elemanının en fazla $m$ tane elemanı varsa, $x$'in elemanlarının bileşiminin en fazla $nm$ tane elemanı olabilir.

A5, zaten en fazla 2 elemanlı kümeler yaratıyor.

A6 ise, verilen bir $x$ kümesinden $x$'in altkümeler kümesini var ediyor. Ama eğer $x$'in $n$ tane elemanı varsa, $2^n$ tane altkümesi vardır, dolayısıyla bu aksiyom da sonsuz küme yaratmakta kullanılamaz.

## 1.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Eğer $x$ ve $y$ iki kümeyse,

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

topluluğunun bir küme olduğu A5 kullanılarak kolaylıkla kanıtlanabilir. Bundan böyle bu kümeyi $(x, y)$ olarak yazacağız:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

$(x, y)$'ye bir ***çift*** ya da ***ikili*** adı verilir.

Eğer $x$, $y$, $z$ üç kümeyse, $((x, y), z)$ ya da $(x, (y, z))$ kümelerini de var edebiliriz elbette.

**Önsav 1.3.** *$x = y$ ve $y = t$ eşitlikleri, $(x, y) = (z, t)$ eşitliği için yeter ve gerek koşuldur. Ayrıca*

**i.** *Eğer $x \in A$ ve $y \in B$ ise $(x, y) \in \wp(\wp(A \cup B))$ olur.*

**ii.** *Eğer $\alpha = (x, y)$ ise,*

$$x = \cap\cap\alpha \text{ ve } y = (\cup\cup\alpha \setminus \cap\cap\alpha) \cup (\cap\cup\alpha)$$

*olur, yani $\alpha$, $x$ ve $y$'yi kümeler kuramının bir formülüyle tanımlar.*

**Kanıt:** Aslında (ii), önsavın ana önermesini kanıtlıyor ama sırayı takip edelim. $(x, y) = (z, t)$, yani $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$ eşitliğini varsayalım.

Önce $x \neq y$ varsayımını yapalım. O zaman $\{x\}$ kümesinin bir, $\{x, y\}$ kümesinin ise iki elemanı vardır. Demek ki bu kümeler birbirine eşit olamazlar; eşitliğin solundaki $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesinin iki elemanı vardır. Demek ki eşitliğin sağındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinde de iki eleman olmak zorundadır, yani $\{z\} \neq \{z, t\}$, yani $z \neq t$ olmalıdır. Her iki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \text{ ve } \{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinde de ikişer eleman olduğunu ve bu elemanların birinin bir, diğerinin iki elemanlı bir küme olduğunu kanıtladık. Eşitliğin sol tarafındaki

$$\{\{x\}, \{x, y\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{x\}$ kümesi, eşitliğin sağ tarafındaki

$$\{\{z\}, \{z, t\}\}$$

kümesinin yegâne tek elemanlı elemanı olan $\{z\}$ kümesine eşit olmalı: $\{x\} = \{z\}$, yani $x = z$. Aynı nedenden $\{x, y\} = \{z, t\}$ olmalı. $x = z$ olduğundan

$$\{y\} = \{x, y\} \setminus \{x\} = \{z, t\} \setminus \{z\} = \{t\}$$

olur ve bundan da $y = t$ çıkar.

Eğer $x = y$ ise, o zaman

$$\{\{x\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\}$$

olur, yani $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ kümesinin tek elemanı vardır ve bu eleman da $\{x\}$ elemanıdır: $\{z\} = \{z, t\} = \{x\}$. Buradan da $x = z = t$ çıkar.

$x = y$ ve $y = t$ ise $(x, y) = (z, t)$ eşitliği bariz olduğundan (i) ve (ii) önermelerinin kanıtına girişebiliriz.

Önce (ii)'yi kanıtlayalım. $\alpha = (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ olsun. O zaman

$$\cup\alpha = \{x\} \cup \{x, y\} = \{x, y\}$$

ve

$$\bigcap\alpha = \{x\} \cap \{x, y\} = \{x\}$$

olur. Demek ki,

$$\bigcup\bigcup\alpha = \bigcup\{x, y\} = x \cup y,$$
$$\bigcap\bigcup\alpha = \bigcap\{x, y\} = x \cap y$$

ve

$$\bigcap\bigcap\alpha = \bigcap\{x\} = x$$

olur. Böylece eşitsizliklerden biri kanıtlanmış olur. İkinci eşitlik de kolay:

$$(\bigcup\bigcup\alpha \setminus \bigcap\bigcap\alpha) \cup (\bigcap\bigcup\alpha) = ((x \cup y) \setminus x) \cup (x \cap y) = y.$$

(i)'i kanıtlamak için şu önermeleri peşisıra kanıtlayın:

**1.** $\{x\}$ ve $\{x, y\}$ kümeleri $X \cup Y$ kümesinin birer altkümesidir.

**2.** $\{x\}$ ve $\{x, y\}$ kümeleri $\wp(X \cup Y)$ kümesinin birer elemanıdır.

**3.** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi $\wp(X \cup Y)$ kümesinin bir altkümesidir.

**4.** $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ kümesi $\wp(\wp(X \cup Y))$ kümesinin bir elemanıdır.

Önsav başarıyla kanıtlanmıştır. □

Şimdi, $X$ ve $Y$ birer kümeyse, Tanımlı Altküme Aksiyomu ve Önsav 1.3 sayesinde $X \times Y$ kümesini $x \in X$ ve $y \in Y$ için, $(x, y)$ biçiminde yazılan elemanlar kümesi olarak tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{(x, y) : x \in X \text{ ve } y \in Y\} \\ &= \{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : x \in X \text{ ve } y \in Y \text{ için } \alpha = (x, y)\} \\ &= \{\alpha \in \wp(\wp(X \cup Y)) : \exists x\ \exists y\ (x \in X \wedge y \in Y \wedge \alpha = (x, y)\}. \end{aligned}$$

(Önsav 2 ve A6'ya göre $\wp(\wp(X \cup Y))$ bir kümedir. $z = (x, y)$ eşitliğinin kümeler kuramının bir formülüyle ifade edilebileceği biraz daha çaba gerektirir ama bu çaba için gereken bilgi Önsav 1.3'te mevcuttur. Bunu okura illa yapması gerekmeyen bir alıştırma olarak bırakıyoruz.)

$X \times Y$ kümesine, ünlü Fransız matematikçisi ve filozofu Descartes'a (dekart diye okunur) atfen, $X$ ve $Y$ kümelerinin ***kartezyen çarpımı*** denir. Ama yukarda verdiğimiz

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

çiftinin tanımı Polonyalı matematikçi Kuratowski'nindir.

Önsav 1.3'ü sağlayan başka kümeler de oluşturabilirsek, o zaman kartezyen çarpımın başka tanımlarını da verebiliriz. Örneğin,

$$\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

kümesi de bu özelliği sağlar. Dolayısıyla

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$$

tanımını da yapabilirdik.

Değişik tanımlar yapmak mümkündür, ama en kabul edileni verdiğimiz Kuratowski'nin tanımıdır. Başka tanımlar için bkz aşağıdaki 1 ve 2'nci alıştırmalar.

**Alıştırmalar**

**1.** $\{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\} = \{\{\{z\}, \emptyset\}, \{t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

**2.** $\{\{\emptyset, x\}, \{\{\emptyset\}, y\}\} = \{\{\emptyset, z\}, \{\{\emptyset\}, t\}\}$ ise $x = z$ ve $y = t$ eşitliğini kanıtlayın.

**3.** $x$, $y$, $z$ kümeleri için $((x, y), z)$ kümesinin elemanlarını ve her elemanının elemanını yazınız. Bu kümenin $(x, (y, z))$ kümesiyle ortak elemanı ne zaman vardır?

$x$'e $(x, y)$ çiftinin ***birinci izdüşümü***, $y$'ye de ***ikinci izdüşümü*** denir.

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x = \cap\cap(x, y)$$

ve

$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y = (\cup\cup(x, y) \setminus \cap\cap(x, y)) \cup (\cap\cup(x, y))$$

yazılır. Önsav 1.3'e göre $(x, y)$ çifti $x$ ve $y$ elemanlarını belirlediğinden buna hakkımız var.

İlerde kartezyen çarpımın tanımını değiştireceğiz. Fonksiyonları tanımlayabilmek için şimdilik bu geçici tanıma ihtiyacımız var.

Biraz ilerde $(X \times Y) \times Z$ gibi kartezyen çarpımları da kullanacağız. Bazen bu kartezyen çarpımlarını parantezsiz biçimde,

$$X \times Y \times Z$$

olarak yazacağız. Elemanlarını da $((x, y), z)$ yerine $(x, y, z)$ olarak yazacağız. Bu tür elemanlara ***üçlü*** diyeceğiz.

### 1.3. İkili İlişki ve Sıralama

$X$ bir küme olsun. $X$ üzerine ikili bir ***ilişki*** $X \times X$ kartezyen çarpımının bir $R$ altkümesidir. $(x, y) \in R$ yerine çoğu zaman $xRy$ yazılır.

$R$ yerine, $\equiv$, $\approx$, $\leq$, $\subseteq$ gibi, bize daha fazla anlam ifade eden, sezgimize ve alışkanlıklarımıza daha fazla seslenen simgeler de kullanılır.

Çok bilinen üç tür ilişki vardır:

1) $R = X \times X$. Bu ilişkide, her eleman her elemanla ilişkidedir, dolayısıyla pek ilginç bir ilişki değildir.

2) $R = \emptyset$. Bu ilişkide, hiçbir eleman bir başka elemanla ilişkide değildir, dolayısıyla bu da pek ilginç bir ilişki değildir.

3) $R = \{(x, y) \in X : x = y\} = \{(x, x) : x \in X\}$. Bu ilişkide her eleman sadece kendisiyle ilişkidedir. Bu ilişki de ilginç sayılmaz.

Eğer her $x \in X$ için $xRx$ oluyorsa, $R$'ye ***yansımalı ilişki*** denir.

Eğer her $x, y \in X$ için, $xRy$ olduğunda $yRx$ oluyorsa, $R$'ye ***simetrik ilişki*** denir.

Eğer her $x, y, z \in X$ için, $xRy$ ve $yRz$ olduğunda $xRz$ oluyorsa, $R$'ye ***geçişli*** ya da ***geçişkenli*** ya da ***geçişli ilişki*** denir.

Eğer her $x, y \in X$ için, $xRy$ ve $yRx$ olduğunda $x = y$ oluyorsa, $R$'ye ***antisimetrik ilişki*** denir.

Yansımalı, simetrik ve geçişli ilişkilere ***denklik ilişkisi*** adı verilir. [SKK]'da bu kavram üzerine uzun uzun durduk.

Yansımalı, antisimetrik ve geçişli ilişkilere ***sıralama*** ya da ***kısmi sıralama*** denir. Bu durumda $(X, R)$ çiftine (***kısmi***) ***sıralı küme*** denir. Örneğin $A$ bir kümeyse ve $X = \wp(A)$ ise, "$x \subseteq y$" ilişkisi bir sıralamadır.

Sıralamalar genellikle $R$ yerine $\leq$ simgesiyle gösterilir, biz de öyle yapacağız.

Eğer bir $\leq$ sıralamasında her $x, y \in X$ için, ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ ilişkilerinden biri doğru oluyorsa, o zaman bu sıralamaya ***tamsıralama*** denir.

$\leq$ ikili ilişkisi, $X$ üzerine bir tamsıralama olsun. $\emptyset \neq A \subseteq X$ olsun. Eğer $A$'da, her $x \in A$ için $a \leq x$ ilişkisini sağlayan bir $a$ elemanı varsa, bu $a$ elemanına ($\leq$ sıralaması için) $A$'nın ***en küçük elemanı*** adı verilir. Eğer $X$'in boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı varsa bu sıralamaya ***iyisıralama*** denir.

Eğer $\leq$ ikili ilişkisi $X$ kümesi üzerine bir sıralamaysa, $x, y \in X$ için $x < y$ ve $x \neq y$ ise $x < y$ yazılır ve bu durumda $x$, $y$'den ***mutlak küçük*** denir. $<$ ilişkisi geçişkenli ve antisimetriktir ama yansımalı olmaktan çok uzaktır: Hiçbir $x$ için $x < x$ olmaz.

### 1.4. Fonksiyon

$X$ ve $Y$ birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımında bir ***grafik***, $X \times Y$'nin şu özelliğini sağlayan bir $G$ altkümesidir:

> *Her $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ içindeliğini sağlayan bir ve bir tane $y \in Y$ vardır.*

$X$'ten $Y$'ye giden bir ***fonksiyon***, $X \times Y$ kartezyen çarpımının bir $G$ grafiği için, $(X, Y, G)$ biçiminde yazılan bir üçlüdür. Dolayısıyla, (her şey olduğu gibi) bir fonksiyon da bir kümedir.

Bir $(X, Y, G)$ üçlüsünün fonksiyon olduğunu kanıtlamak için $G$'nin bir küme olduğu kanıtlanması gerektiği gözden kaçmamalıdır. (Genellikle $X$ ve $Y$'nin küme olduğunu kanıtlamak kolaydır.)

**Örnek.** $X$ ve $Y$ birer küme olsun.

$$G = \{(\alpha, x) \in (X \times Y) \times X : \mathrm{pr}_1(\alpha) = x\}$$

olsun. O zaman A3'e göre $G$ bir kümedir ve $(X \times Y, X, G)$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, tahmin edileceği üzere,

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$$

olarak yazılır ve ***birinci izdüşüm fonksiyonu*** olarak bilinir. Benzer şekilde ***ikinci izdüşüm fonksiyonu***

$$\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$$

fonksiyonu da tanımlanabilir.

**Örnek.** $X$ bir küme olsun.

$$G = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$$

olsun. O zaman $(X, X, G)$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, tahmin edileceği üzere,

$$\mathrm{Id}_X : X \to X$$

olarak yazılır ve ***özdeşlik fonksiyonu*** olarak bilinir.

**Alıştırma.** $X \times Y$'nin iki grafiği ancak birbirine eşitse biri diğerini içerebilir.

Eğer $f = (X, Y, G)$ bir fonksiyonsa, $X$'e $f$'nin ***tanım kümesi***, $Y$'ye $f$'nin ***değer kümesi***, $G$'ye de $f$'nin ***grafiği*** adı verilir. Eğer $x \in X$ için, $(x, y) \in G$ ise, bu $y$ (verilmiş $x$ için) biricik olduğundan,

$$f(x) = y$$

ya da

$$fx = y$$

yazabiliriz. Örneğin,

$$\mathrm{pr}_1(x, y) = x,$$
$$\mathrm{pr}_2(x, y) = y,$$
$$\mathrm{Id}_X(x) = x.$$

$y$'ye $f$'nin $x$'te aldığı ***değer*** denir. Çoğu zaman bir $f = (X, Y, G)$ fonksiyonu, $G$'den hiç sözedilmeden,

$$f : X \to Y$$

olarak gösterilir. Eğer $f(x) = y$ eşitliğini sağlayan $y$'yi $x$ cinsinden ifade eden $f(x) = x^2$ gibi bir "kural" bulabilirsek, o zaman $G$'yi bu kuralla belirleyebiliriz.

Şimdi herkesin bildiğini umduğumuz tanımları resmi bir dilde verelim.

**Resmi Tanımlar:**

$f = (X, Y, G) : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

Eğer her $y \in Y$ için $(x, y) \in G$ ilişkisini sağlayan bir $x \in X$ varsa, $f$ fonksiyonuna ***örten*** denir.

Eğer her $x, x_1 \in X$ ve $y \in Y$ için $(x, y) \in G$ ve $(x_1, y) \in G$ ilişkisi ancak $x = x_1$ iken sağlanabiliyorsa $f$ fonksiyonuna ***birebir*** denir.

Birebir ve örten fonksiyonlara ***eşleme*** denir.

Eğer $X = Y$ ise eşleme yerine ***eşleşme*** terimi tercih edilir.

Eğer $A \subseteq X$ ise, $f(A) \subseteq Y$ kümesi,

$$\begin{aligned} f(A) &= \{y \in Y : \exists x\ x \in A \text{ ve } (x, y) \in G)\} \\ &= \{y \in Y : \exists x\ x \in A \text{ ve } y = f(x)\} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve adına $A$'nın ***görüntü kümesi*** adı verilir. $f$'nin örten olması için yeter ve gerek koşul $f(X) = Y$ eşitliğidir.

Eğer $B \subseteq Y$ ise, $f^{-1}(B) \subseteq X$ kümesi,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

olarak tanımlanır ve adına $B$'nin ***öngörüntü kümesi*** adı verilir. Elbette

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(X)) = X$$

olur.

Eğer $A \subseteq X$ ve $G_1 = \{(x, y) \in G : x \in A\}$ ise, $(A, Y, G_1)$ üçlüsü de bir fonksiyondur; bu fonksiyona $f$'nin $A$'ya ***kısıtlanışı*** adı verilir ve bu fonksiyon $f_{|A}$ olarak gösterilir.

Eğer $f = (X, Y, G)$ ve $f_1 = (Y, Z, G_1)$ birer fonksiyonsa,

$$G_2 = \{(x, z) \in X \times Z : \exists y\ y \in Y \wedge (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G_1\}$$

olsun. O zaman $(X, Z, G_1)$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyona $f$ ve $f_1$'in (bu sırayla!) ***bileşkesi*** adı verilir ve bu fonksiyon $f_1 \circ f$ olarak (ters yazılıma dikkat) olarak gösterilir.

Fonksiyonlarla okurun sezgisel anlamda âşina olduğunu varsayıyoruz ve bu konunun üstüne fazla gitmiyoruz. Bu konuda yardıma ihtiyacı olanlar [SKK]'ya başvurabilirler.

Eğer $(X, Y, G)$ üçlüsü bir fonksiyonsa ve $Y \subseteq Y_1$ ise, o zaman $(X, Y_1, G)$ üçlüsü de bir fonksiyondur. Demek ki $X$ ve $G$, $Y$'yi belirlemeye yetmiyor.

Öte yandan, $G$ grafiği $X$'i belirler; yani eğer $((X, Y), G)$ ve $((X_1, Y_1), G)$ aynı grafiğe sahip iki fonksiyonsa, o zaman $X = X_1$ olmak zorundadır. (Neden?)

Eğer $X$ ve $Y$ sıralı kümelerse ve $f : X \to Y$ fonksiyonu, her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

önermesini sağlıyorsa, $f$'ye ***artan*** ya da ***azalmayan fonksiyon*** diyeceğiz. Eğer her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

önermesini sağlıyorsa $f$'ye ***mutlak artan fonksiyon*** diyeceğiz. ***Azalan*** ve ***mutlak azalan*** fonksiyonların tanımı benzerdir.

**Önsav 1.4.** *$X$ ve $Y$ birer küme olsun. $X$'ten $Y$'ye giden fonksiyonlar bir küme oluştururlar.*

**Kanıt:** A3'ten oldukça kolay bir biçimde çıkar. □

$X$'ten $Y$'ye giden fonksiyonlar kümesi Fonk$(X, Y)$, ${}^XY$ ya da $Y^X$ olarak yazılır. Biz genellikle birinci yazılımı kullanacağız.

**Alıştırma.** $X$, $Y$ ve $Z$ birer küme olsun. Fonk$(X$, Fonk$(Y, Z))$ kümesiyle Fonk$(X \times Y, Z)$ kümesi arasında bir eşleme olduğunu kanıtlayın. (Yani bir anlamda $(Z^Y)^X \approx Z^{(XY)}$.)

## 1.5. Küme Ailesi ve Dizi

**Küme Ailesi.** "Küme ailesi" kavramının tek varoluş nedeni psikolojik nedenlerdir, yoksa bir fonksiyondan farkı yoktur. Psikolojik nedenler üzerinde fazla durmadan kavramı tanımlayalım. $I$ bir küme olsun. $\mathcal{X}$ de bir küme olsun. $I$'dan $\mathcal{X}$'e giden bir fonksiyona bazen ***aile*** adı verilir.

$X$, bir aile olsun, yani $X$, $I$ kümesinden bir $\mathcal{X}$ kümesine giden bir fonksiyon olsun. Demek ki her $i \in I$ için $X(i) \in \mathcal{X}$. Gereksiz gibi görünecek belki ama $X(i)$ yerine $X_i$ yazalım. Ardından $X$ yerine

$$(X_i)_{i \in I}$$

yazalım. Bir "aile" matematikte $(X_i)_{i \in I}$ olarak gösterilir.

Ama aileyi böyle $(X_i)_{i \in I}$ olarak gösterince $\mathcal{X}$ kümesi ortadan kaybolmuş olur. Olsun... Bir ailede değer kümesi çok önemli değildir. (Önemli olsaydı, $X$ fonksiyonunu $(X_i)_{i \in I}$ olarak değil, bir "$X : I \to \mathcal{X}$" fonksiyonu olarak gösterirdik.) Nitekim bir $(X_i)_{i \in I}$ ailesinin verilmiş olması, $I$'dan $X_i$ kümelerini eleman olarak içeren **herhangi** bir $\mathcal{X}$ kümesine giden ve her $i \in I$ için

$$X(i) = X_i$$

değerini alan bir $X$ fonksiyonunun verildiği anlamına gelir.

**Dizi.** Dizi kavramının da tek varoluş nedeni psikolojiktir. Bir dizi doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'den bir $X$ kümesine giden bir fonksiyondur. Eğer $x$ bir diziyse, yani

$$x : \mathbb{N} \to X$$

bir fonksiyonsa, $n \in \mathbb{N}$ için, $x(n)$ yerine $x_n$ yazalım. Bir dizi, aynen bir aile gibi, $(x_n)_n$ olarak gösterilir. Ama bir diziyi böyle yazarsak değer kümesi $X$ kaybolur. Eğer $X$'siz olmuyorsa, $X$ illa gerekiyorsa, "dizi" yerine "$X$-dizisi"nden sözedilebilir. Eğer $X$ sıralı bir kümeyse, ***artan*** ya da ***mutlak artan dizinin*** anlamı aynen fonksiyonlardaki gibidir.

### 1.6. Kartezyen Çarpım, Bir Daha

Daha önce tanımını verdiğimiz “iki kümenin kartezyen çarpımı” tanımını unutalım... Daha doğrusu, daha önce tanımladığımız “iki kümenin kartezyen çarpımı” kavramının adını değiştirelim, çünkü fonksiyon kavramını tanımlarken gereksindik o kavrama ve tamamen unutmaya hakkımız yok.

$(X_i)_{i\in I}$ bir aile olsun. $\mathscr{X}$, tüm bu $X_i$’leri eleman olarak içeren bir küme olsun. (Yani $(X_i)_{i\in I}$ ailesi, aslında $I$’dan $\mathscr{X}$ kümesine giden $X(i) = X_i$ kuralıyla tanımlanmış bir fonksiyon, ama bunu böyle değil de bir “küme ailesi” olarak “görmek” ve “hissetmek gerekir. Psikoloji burada devreye giriyor.)

$$\cup\mathscr{X}$$

kümesi, her $i \in I$ için, $X_i$ kümesini altküme olarak içerir.

$(X_i)_{i\in I}$ ailesinin ***kartezyen çarpımı***,

$\prod_{i\in I} X_i = \{x \in \mathrm{Fonk}(I, \cup\mathscr{X}) : \text{her } i \in I \text{ için, } x(i) \in X_i\}$

kümesi olarak tanımlanır.

Bir an için doğal sayıların tanımlandığını varsayalım. Eğer $n$ bir doğal sayıysa,

$$\prod_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} X$$

yerine

$$\prod_{i<n} X_i$$

ya da belki daha uzun ama dajha anlaşılır biçimde

$$X_0 \times \cdots \times X_{n-1}$$

yazılır. Eğer ayrıca

$$X_0 = \ldots = X_{n-1} = X$$

ise

$$X_0 \times \cdots \times X_{n-1} = X \times \cdots \times X$$

yerine $X^n$ yazılır.

***İzdüşüm fonksiyonları*** da tahmin edildiği gibi tanımlanırlar.