Not 5 (İşlem (operasyon) kavramı üzerine): Bu kitapta, “Bir A kümesinde ikili iç işlem (Operation)” kavramı “ $A\times A$’nın bir alt kümesinden A’ya bir fonksiyon” olarak tanımlanmıştır. Kısaca “İşlem” dediğimiz bu kavram, ülkemizde 1968’de “Modern Matematik” adıyla başlatılan matematik programlarında da buradaki gibi ele alınmıştır. “Kapalı İşlem” ise “$A\times A$’dan A’ya bir işlem (*)” olarak tanımlanır. Fakat klasik kitapların birçoklarında, “Kapalı İşlem” tanımı “İşlem” tanımı olarak verilmiştir. Bu bir tanım meselesidir ve bir çelişkiye yol açmadığı sürece tanımlara karışılmaz…Fakat, “İşlem” kavramı ($A\times A$’nın bir alt kümesinden değil de) “$A\times A$’dan A’ya bir fonksiyon” olarak tanımlanırsa bunun ardından aynı tanım verilerek “kapalı işlem” diye bir kavram da ortaya atılırsa matematiksel zerafet ve dakiklik zedelenmiş olur. Bazı kitaplarda ise “İşlem” kavramı “$A\subset B$ olmak üzere $A\times A$ dan B ye fonksiyon” olarak tanımlanmıştır. Bu tanıma göre ise bir “$*$” işlemi A’nın herhangi iki x, y elemanı için $x * y$ ve $y * x$’in ikisinin de tanımlı olmasını gerektirmektedir. Oysa kapalı olmayan işlemler için bunlardan biri (ya da ikisi birden) tanımlı olmayabilir. Klasik matematikte “iyi tanımlılık” denilen “bir ikiliye karşılık birden çok elemanın karşılık gelmemesi” koşulu ise işlemin bir fonksiyon olmasının gereğidir. $A\times A$’dan A’ya bir $*$ işlemi, $*: A\times A\to A$ biçiminde bir fonksiyondur ve o halde, bir fonksiyon olmanın

i. $(x, y) = (z, t) \Rightarrow x * y = z * t$ (iyi tanımlılık)
ii. $(x, y) \in A\times A \Rightarrow x * y \in A$ (kapalılık)
($\forall x,y \in A, x * y\in A$)

koşullarını (zaten) yerine getirir. Bir $*$ işlemi **(ii)** koşulunu sağlarsa kapalı, aksi halde, yani

“ $\exists x,y \in A, x * y \notin A$ ”

ise “kapalı olmayan” bir işlem olur. Matematikte yeni kavramlarla ilgili yapılan tanımlar daha önceki tanımlar, varsayımlar ve teoremlerle çelişmemeli ve uyum içinde olmalıdır. Özellikle de bunların ifadelelerinde dakiklik ve kesinlik zorunluluğu vardır. Türkçe, İngilizce vs gibi ulusal diller matematiksel kesinliği bir ölçüde sağlayabilirse de, matematiksel kesinlik hangi ulustan olurlarsa olsunlar herkesin aynı şeyi (tam tamına-ne eksik ne fazla) anlayabilmesini sağlayan “Matematiğin Evrensel Sembolik Dili” ile sağlanır. $A \times A$’nın alt kümesi (işlemin domaini) olan α’nın boş küme olması halinde işleme “A’da boş işlem” denir. $\not\phi: \phi^2 \to A$ işlemi, kapalılık, birleşme, değişme, vs gibi özellikleri sağlar. (Neden?). $A=\phi$ olması halinde de $\not\phi: \phi^2 \to \phi$ işlemi sözkonusu edilebilir. Bazı kaynaklarda böyle bir kavramın gereksiz olacağı düşünülüp $\alpha \neq \phi$ ve $A\neq \phi$ kabul edilmektedir. Bu bir tanım meselesidir; fakat bir A kümesindeki işlemlere ϕ işlemin de dahil edilmesi bazı sayma problemleri için daha estetik denilebilecek formülasyonları sağlamaktadır. Bakz(). Aşağıda bazı kaynaklardan işlem operasyon tanımları verilmiştir (Bunlardan sadece 1. sırada verdiğimiz, Prof. Dr. Erdoğan S. Şuhubi’nin kitabında yer alan tanım bu kitapta verilen tanımdır. 2,3,…,8. kitaplarda verilen tanımlar da aynı sayılabilir; fakat 9, 10, …,18. eserlerde yer alan tanımlar burada verilenden farklıdır.):

1. “ Bir X kümesi üzerinde bir ikili işlem bu kümenin kendisiyle kartezyen çarpımının bir Y alt kümesinden X kümesine bir fonksiyondur.[40]

2. “$A\neq\varnothing$ kümesi verilsin. AxA’nın boş olmayan bir alt kümesi α olsun. α’dan A’ya tanımlı bir f fonksiyonuna A’da bir ikili işlem denir.” [41]

3. “Boş olmayan bir A kümesi verildiğinde, AxA'nın bir alt kümesinden A'ya her fonksiyona bir ikili işlem ya da kısaca işlem denir.” [42]

4. “$A\neq\varnothing$ kümesi için AxA kümesinin bir alt kümesinden A’ya tanımlanan her fonksiyona A’da ikili işlem veya kısaca işlem denir.” [43]

5.“A bir küme ve $\beta\subset A\times A$ olsun.β kümesinden A’ya verilen her fonksiyona A da bir “ikili işlem” veya “işlem” denir”. [44]

6. “$A\neq\phi$ olmak üzere $A\times A$ nın bir alt kümesinden A’ya tanımlı her dönüşüme A’da bir ikili iç işlem ya da kısaca işlem diyeceğiz.” [45]

7. “A boş olmayan bir küme olsun. $A\times A$ nın boş olmayan herhangi bir alt kümesinden A ya tanımlanan her fonksiyona A da “ikili işlem” veya “işlem” denir. [46]

8. “$A \neq \phi$ olmak üzere $A \times A$ nın bir alt kümesinden A ya her fonksiyona A da bir ikili iç işlem denir…” (Zamanında biz de boş işlemi saymamışız!...) [9]

9. “A boş olmayan bir küme ve $A \subset B$ olsun. f: AxA $\to$ B fonksiyonuna A’da bir ikili işlem veya kısaca işlem denir.” []

10. “Boş olmayan A ve B kümeleri için AxA’nın boş olmayan bir alt kümesinden B’ye tanımlı her fonksiyona (f:AxA$\to$B) bir ikili işlem veya A’da bir işlem denir.” [47]

11. “E boş olmayan bir küme olsun,E üzerinde bir ikili operasyondan $E \times E$ çarpım cümlesinin E içine bir tasviri anlaşılır.” [48]

12. “G boş olmayan bir küme olmak üzere G üzerinde bir “İkili İşlem- Binary Operation”, $G \times G \to G$ biçiminde bir fonksiyondur.” [ ]

13. “Bir E cümlesi ve bunun elemanlarından meydana gelen (a, b) çiftleri cümlesini yani E’nin kendisi ile ExE çarpımını ele alalım. Her (a.b) çiftine E’nin bu elemanlarını tekabül ettiren ikili işleme E üzerinde tarif edilen bir iç işlem denir…. örnek kesirler cümlesinde bölme işlemi…[49]

14. “$A \neq \phi$ ve $A \subset B$ ise her f: $A \times A \to B$ fonksiyonu A üzerinde bir ikili işlemdir.” [2]

15. “a binary operation is a function from $G \times G$ to G, which we often write as $(a,b) \to ab$”) [53]

16. “Binear işlemli, yani her $a,b \in G$ çiftine karşılık bir $ab \in G$ elemanının karşı geldiği boş olmayan bir küme G olsun…”[17]

17. “Herhangi bir M kümesi verildiğine göre, $M \times M$’yi M içine resmeden bir tasvir varsa, yani $a,b \in M$ olmak üzere her sıralanmış (a,b) çiftine tamamen belirli bir $c \in M$ tekabül ettirilebiliyorsa M de bir ikili işlem tanımlanmıştır denir. İçinde en az bir tane ikili işlem tanımlanmış bir cümleye bir cebirsel yapı denir.” [37]

18. “Bir işleme, ancak ve ancak E’ nin her eleman çiftine yine E kümesine ait bir sonuç karşılık getirirse bir iç işlemdir ve E nin her yerinde tanımlıdır denir. Başka bir deyimle, E kümesi içinde **her yerde tanımlı bir iç işlem** $E \times E$ den E ye bir dönüşümdür. Daha kesin olarak şu şekilde söylenebilir: * işlemi yalnız ve yalnız $\forall x,y \in E$: $x*y \in E$ ise bir iç işlemdir ve E nin her yerinde tanımlıdır. Eğer * işlemi E içinde her yerde tanımlı bir iç işlem ise E kümesi * işlemi ile kuşatılmıştır diyeceğiz. Ve E, bir cebirsel yapıdır denir”. [19]