1.11. İçiçe aralıklar sistemi

İçiçe aralıklar sistemi reel sayılar kümesinin sağladığı tamlık aksiyomuna eşdeğer bir ifadenin verilmesine imkan sağlar. Bu kavramı vermeden önce açık aralık, kapalı aralık ve yarı açık aralık kavramlarını veriyoruz:

1.11.1.Tanım. a ve b reel sayılar olmak üzere

$$\{x : x \in IR,\ a \le x \le b\}$$

kümesine bir kapalı aralık denir ve [a,b] ile gösterilir.

$$\{x : x \in IR,\ a < x < b\}$$

kümesine bir açık aralık denir ve]a,b[ile gösterilir.

$$\{x : x \in IR,\ a < x \le b\}$$

kümesine soldan açık sağdan kapalı aralık denir ve]a,b] ile gösterilir.

$$\{x : x \in IR,\ a \le x < b\}$$

kümesine soldan kapalı sağdan açık aralık denir ve [a,b[ile gösterilir.

a=b olduğu zaman yalnız kapalı aralık boş olmayan bir küme olacaktır, diğerleri boş olacaktır. Yani [a,a]={a} , [a,a[=]a,a[=]a,a] = ø dır. b<a olduğunda ise; [a,b] =]a,b] = [a,b[=]a,b[= ø olur, ayrıca,

$]-\infty, b[= \{x : x \in R,\ x < b\}$, $]-\infty, b] = \{x : x \in R, x \le b\}$,

$]a, \infty[= \{x : x \in R,\ x > a\}$, $[a, \infty[= \{x : x \in R,\ x \ge a\}$

olarak tanımlanır.

1.11.2.Tanım. Her n doğal sayısı için $a_n, b_n \in IR$, $a_n < b_n$ olmak üzere $I_n = [a_n, b_n]$ yazalım. Eğer her $n \in IN$ için

(i) $I_n \supset I_{n+1}$, $I_n \neq I_{n+1}$

ise ve

(ii) $b_1 - a_1 > b_2 - a_2 > \ldots > b_n - a_n > b_{n+1} - a_{n+1} \longrightarrow 0$

oluyorsa I_n aralıkları içiçe aralıklar sistemi oluşturur denir.

1.11.3.Teorem $\{I_n\}$ aralıklar kümesi bir içiçe aralıklar sistemi olsun. Bu takdirde I_n aralıklarının hepsine de ait olan bir tek sayı vardır.

İspat. $I_n \supset I_{n+1}$ olduğundan her $n \in IN$ için $a_n \le a_{n+1}$ ve $b_{n+1} \le b_n$ dır $A=\{ a_n : n \in IN \}$ kümesini göz önüne alalım. Her $n \in IN$ için $a_n \le b_1$ olduğundan A kümesi üstten sınırlıdır. Tamlık aksiyomundan dolayı A kümesinin bir en küçük üst sınırı vardır. $\sup A=\alpha$ diyelim. Her n doğal sayısı için $a_n \le \alpha$ dır. Eğer her $n \in IN$ için $\alpha \le b_n$ olduğunu da gösterebilirsek α sayısı her I_n aralığına ait olur. Eğer her $n \in IN$ için $\alpha \le b_n$ olmasaydı en az bir $n_0 \in IN$ için $b_{n_0} < \alpha$ olurdu ki bu da her $n \in IN$ için b_n, A kümesi için üst sınır olduğundan , α dan küçük bir b_{n_0} sayısı A için bir üst sınır olarak bulunurdu. Bu ise α nın üst sınırların en küçüğü olmasına aykırıdır. O halde her $n \in IN$ için $\alpha \le b_n$ dir. Böylece her $n \in IN$ için $a_n \le \alpha \le b_n$ dir, yani her $n \in IN$ için $\alpha \in I_n$ dir. Şimdi de her I_n aralığına ait olan başka sayının bulunmadığını, diğer bir deyişle α dan farklı hiç bir sayının her I_n aralığına ait olmadığını ispatlayalım. α dan farklı bir β sayısının da her I_n aralığına ait olduğunu varsayalım. Bu durumda her $n \in IN$ için $\beta \in I_n$ yani $a_n \le \beta \le b_n$ olacaktı. $\alpha \ne \beta$ olduğundan ya $\alpha < \beta$ ya da $\beta < \alpha$ dır. Eğer $\alpha < \beta$ ise her $n \in IN$ için $a_n \le \alpha < \beta \le b_n$ olurdu ki buradan,

(1) $\quad b_n - a_n \ge \beta - \alpha$

bulunurdu. Eğer $\beta < \alpha$ ise her $n \in N$ için

$$a_n \le \beta < \alpha \le b_n$$

olurdu ki buradan da

(2) $\quad b_n - a_n \ge \alpha - \beta$

bulunurdu. (i) ve (ii) durumlarının ikisi birlikte

$$b_n - a_n \ge | \beta - \alpha |$$

ifadesini verir. Bu ise $b_n - a_n \longrightarrow 0$ olması hipotezine aykırıdır. O halde α dan farklı başka hiçbir sayı bütün I_n aralıklarına ait olamaz, yani

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{ \alpha \}$$

dır.

Örnek 1. Her n pozitif tamsayısı için $a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}$ olmak üzere, $I_n = [a_n . b_n]$ aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz. Bütün aralıklara ait olan sayıyı bulunuz.

Çözüm. (i) Her $n \in IN$ için n<n+1 $\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Rightarrow$ $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$ olduğundan her $n \in IN$ için $a_n < a_{n+1}$ bulunur. Her $n \in IN$ için n<n+1 $\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$ olduğundan her $n \in IN$ için $b_{n+1} < b_n$ bulunur. Dolayısıyla her $n \in IN$ için $I_n \supset I_{n+1}$ ve $I_n \neq I_{n+1}$ elde edilmiş olur.

(ii) Her $n \in IN$ için $b_n - a_n = (1 + \frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$ olduğundan, ardışık olarak daha açıkça yazacak olursak,

$$b_1 - a_1 = (1 + \frac{1}{1}) - (1 - \frac{1}{1}) = 2$$

$$b_2 - a_2 = (1 + \frac{1}{2}) - (1 - \frac{1}{2}) = 1$$

$$b_3 - a_3 = (1 + \frac{1}{3}) - (1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$

$$b_4 - a_4 = (1 + \frac{1}{4}) - (1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{4}$$

...

$$b_n - a_n = (1 + \frac{1}{n}) - (1 - \frac{1}{n}) = \frac{2}{n}$$

$$b_{n+1} - a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1}) - (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2}{n+1}$$

...

dir. $b_1 - a_1 > b_2 - a_2 > b_3 - a_3 > b_4 - a_4 > ... > b_n - a_n > b_{n+1} - a_{n+1} \to 0$

dir. O halde $I_n = [a_n . b_n]$ aralıkları bir içiçe aralıklar sistemi olur. Her $n \in IN$ için $1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n}$ olduğundan her $n \in IN$ için $1 \in I_n$ dir. O halde aralıkların hepsine birden ait olan bir tek sayı var olduğundan

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{1\}$ dir.

Örnek 2. Her n pozitif tamsayısı için $a_n = 3 - \frac{1}{2^n}, b_n = 3 + \frac{1}{2^n}$ olmak üzere, $I_n = [a_n . b_n]$ aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz. Bütün aralıklara ait olan sayıyı bulunuz.

1.11 Alıştırmalar (İçiçe aralıklar sistemi)

1) Her n doğal sayısı için $a_n = \dfrac{2n-1}{n}, \quad b_n = \dfrac{2n+1}{n}$ olmak üzere,

$I_n = [a_n . b_n]$ aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz. Bütün aralıklara ait olan sayı nedir?

2) 0<a<b olmak üzere $a_1 = \dfrac{2ab}{a+b}, \quad b_1 = \dfrac{a+b}{2}$; $a_2 = \dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$;

$a_3 = \dfrac{2a_2b_2}{a_2+b_2}, \quad b_3 = \dfrac{a_2+b_2}{2}$; . . . ; $a_n = \dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}, \quad b_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$; . . .

olsun. $I_n = [a_n, b_n]$ aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz. Aralıkların hepsine ait olan sayının $\sqrt{ab}$ olduğunu gösteriniz.

3) $[0,1]$ kümesini gözönüne alalım. $[0,1]$ aralığını ortadan ikiye bölelim ve sol yarısına I_1 diyelim, I_1 in sağ yarısına I_2 diyelim. I_2 nin sol yarısına I_3 diyelim. Böylece devam ederek, $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots$ aralıklarını oluşturalım. I_n aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz. Aralıkların hepsine ait olan sayıyı bulunuz. (Çözüm:

$I_n = [a_n, b_n]$ yazalım. $a_1 = 0$ ve $b_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ ve $b_2 = 1 - \frac{1}{2}$,

$a_3 = \frac{1}{4}$ ve $b_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$, $a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ve $b_4 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$,

$a_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ ve $b_5 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32}$, $a_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ ve $b_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32}$,

$a_7 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ ve $b_7 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128}$

, $a_8 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ ve $b_8 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128}$,

$a_9 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ ve $b_9 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} - \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$

....

Böylece her $n \in IN$ için $a_{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{4^n}$ ve

$a_{2n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{4^n}$ ve her $n \in IN$ için

$$b_{2n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{n-1}} \quad \text{ve} \quad b_{2n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{n-1}}$$

$$b_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{n-1}} - \frac{1}{2.4^{n}}$$

Şimdi (I_n) aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösterelim.

Önce n nin çift olduğu durumu gözönüne alalım, yani $k \in IN$ olmak üzere n=2k dudumunu gözönüne alalım. $a_{2k} = a_{2k+1}$ ve

$$b_{2k} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{k-1}} > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{k-1}} - \frac{1}{2.4^{k}} = b_{2k+1}$$

dir, dolayısıyla $I_{2k} \supset I_{2k+1}$ dir. Şimdi de n in tek olduğu durumu gözönüne alalım yani $k \in IN$ olmak üzere n=2k+1 durumunu gözönüne alalım.

$$a_{2k+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^k} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^k} + \frac{1}{4^{k+1}} = a_{2k+2}$$

ve $b_{2k+1} = b_{2k+2}$ olduğundan her n doğal sayısı için $I_n \supset I_{n+1}$ dir.Ayrıca ya $a_n \# a_{n+1}$ ya da $b_n \# b_{n+1}$ olduğundan her n doğal sayısı için $I_n \# I_{n+1}$ elde edilir. Ayrıca

$$b_{2k} - a_{2k} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{k-1}} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} - \dots - \frac{1}{4^k}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1 - \frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^k} \to \infty \quad (\mathrm{k} \to \infty \ iken)$$

$$b_{2k+1} - a_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2.4^{k-1}} - \frac{1}{2.4^{k}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^k}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} + \frac{1}{4^k}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2.4}\left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right) - \frac{1}{4}\left(1 + + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2.4}(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{k-1}})-\frac{1}{4}(1++\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{4^{k-1}})$$

$$=1-\frac{3}{8}(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{k-1}})=1-\frac{3}{8}(\frac{1-\frac{1}{4^k}}{1-\frac{1}{4}})=1-\frac{3}{8}(\frac{1-\frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4^k}=\frac{1}{4^k}\to 0\ (\mathrm{n}\to\infty)$$

bulunur. Böylece $b_n-a_n>b_{n+1}-a_{n+1}>...\to 0$ O halde $\mathrm{n}\to\infty$ iken $b_n-a_n\to 0$ dır. Böylece (I_n) aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğu gösterilmiş oldu. Şimdi de bütün aralıklara ait olan sayıyı bulalım.

$$a_{2k-1}<a_{2k}=a_{2k+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{4^k}=$$

$$\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{k-1}})=\frac{1}{4}(\frac{1-\frac{1}{4^k}}{1-\frac{1}{4}})=\frac{1}{4}(\frac{1-\frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}})=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{4^k})<\frac{1}{3}.1=\frac{1}{3}$$

ve $b_{2k}<b_{2k+1}=b_{2k+2}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}-\frac{1}{2.4^2}-...-\frac{1}{2.4^{k-1}}-\frac{1}{2.4^k}=$

$$=1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^{k-1}}+\frac{1}{4^k})=1-\frac{1}{2}\frac{(1-\frac{1}{4^{k+1}})}{(1-\frac{1}{4})}=1-\frac{1}{2}\frac{(1-\frac{1}{4^{k+1}})}{\frac{3}{4}}=$$

$$=1-\frac{2}{3}(1-\frac{1}{4^{k+1}})=1-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{4^{k+1}}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{4^{k+1}}>\frac{1}{3}$$

bulunur O halde bütün aralıklara ait olan sayı $\frac{1}{3}$ sayısıdır. Buna göre

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{\frac{1}{3}\}$ dir.

4) C kümesi reel sayılar kümesinin sınırlı ve sonsuz elemanlı bir alt kümesi olsun ve infC=a , supC=b yazalım. [a,b] aralığını ortadan ikiye bölelim ve sol yarıda C kümesinin sonsuz elemanı varsa ona I_1 yoksa sağ yarıya I_1 diyelim. I_1 i ikiye bölelim. Sol yarıda C kümesinin sonsuz elemanı varsa ona I_2 diyelim, yoksa diğerine I_2 diyelim. Böylece devam ederek, $I_1,I_2,I_3,\ldots,I_n,\ldots$ aralıklarını oluşturalım. I_n aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz.

4) Her n doğal sayısı için $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $b_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ olmak üzere,

$I_n = [\, a_n . b_n \,]$ aralıklarının bir içiçe aralıklar sistemi olduğunu gösteriniz.

Bütün aralıklara ait olan sayıyı bulunuz.